UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
DIVISION DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE TERMODINAMICA Y FENOMENOS DE TRANSFERENCIA

TF 1221
FENÓMENOS DE TRANSPORTE I

GUIA DE

ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Profesores María Eugenia Aguilera, Dosinda González-Mendizabal, Luis Matamoros y César Oronel

Sartenejas, agosto 2005 (última revisión)

INTRODUCCIÓN

En el programa de la materia Fenómenos de Transporte I está contemplado el uso de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento. Con el objetivo de hacer llegar al estudiante todas estas ecuaciones para los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas se preparó este texto, el cual facilita considerablemente la utilización de las mismas.

Primero, se presenta la ecuación de continuidad para los distintos sistemas de coordenadas, ya mencionados. Después se muestran las ecuaciones de cantidad de movimiento de Cauchy y de Navier-Stokes para cada coordenada, agrupadas según el sistema (cartesiano, cilíndrico o esférico).

OBJETIVOS

Terminal

- Proporcionar al estudiante los conceptos básicos de Mecánica de Fluidos y su aplicación a problemas de interés práctico.

Específicos

- Desarrollar las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, mediante la aplicación de la ley de la conservación de la materia a un pequeño elemento de volumen situado en el seno del fluido en movimiento
- Proporcionar a los estudiantes las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en los diferentes sistemas coordenados, con la finalidad de hacer más sencillo su manejo.

ÍNDICE

Página

LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad se obtiene aplicando un balance de materia a un elemento diferencial de volumen (ΔV), a través de la cual está circulando el fluido.

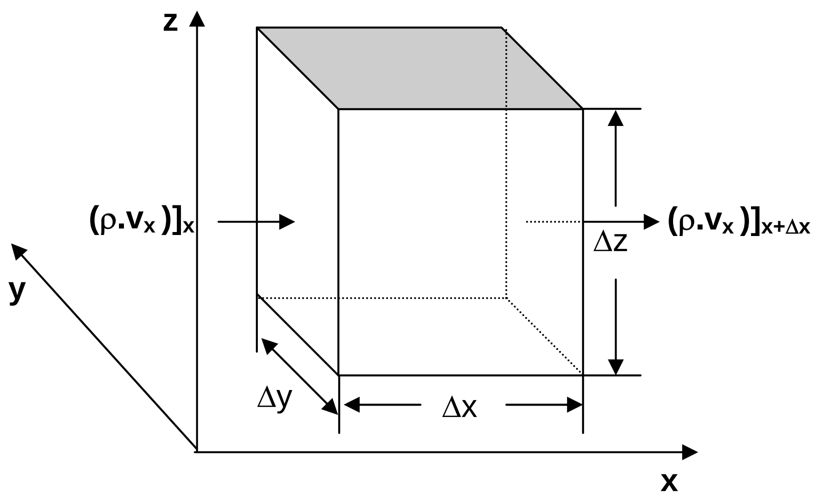

Figura 1. Región de volumen Δx, Δy, Δz fija en el espacio, a través de la cual esta circulando el fluido

Aplicando el balance de materia:

$$\begin{bmatrix}\text{velocidad de acumulación}\\ \text{de materia}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{velocidad de entrada}\\ \text{de materia}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{velocidad de salida}\\ \text{de materia}\end{bmatrix} \qquad (1)$$

Considerando el par de caras perpendiculares al eje x y el área de flujo en x como $\Delta y\Delta z$, se obtiene que la velocidad de entrada de materia a través de la cara x es $(\rho v_x)]_x\Delta y\Delta z$ y la velocidad de salida de materia a través de la cara x + Δx es $(\rho v_x)]_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z$. Por los otros dos pares de caras pueden obtenerse expresiones análogas y la velocidad de acumulación de materia en el elemento diferencial de volumen es $(\partial\rho/\partial t)(\Delta x\Delta y\Delta z)$. Por lo tanto el balance de materia queda:

$$\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial\rho}{\partial t} = \Delta y\Delta z\left[(\rho v_x)\big|_x - (\rho v_x)\big|_{x+\Delta x}\right] + \Delta x\Delta z\left[(\rho v_y)\big|_y - (\rho v_y)\big|_{y+\Delta y}\right]$$
$$+\ \Delta x\Delta y\left[(\rho v_z)\big|_z - (\rho v_z)\big|_{z+\Delta z}\right] \qquad (2)$$

Dividiendo toda la ecuación por $\Delta x \Delta y \Delta z$, y tomando el límite cuando Δx, Δy, Δz tiende a cero, se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right) \qquad (3)$$

Ésta es la ecuación de continuidad y puede escribirse en una forma más conveniente utilizando notación generalizada:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v}) \qquad (4)$$

El término $(\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v})$ se denomina divergencia de ρv, en donde la divergencia (∇) y la velocidad (v) son vectores.

En el siguiente capitulo se presentan la ecuación de continuidad en todos los sistemas coordenados

LA ECUACION DE CONTINUIDAD EN DISTINTOS SISTEMAS COORDENADOS

Coordenadas rectangulares (x,y,z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\rho v_\phi\right) = 0$$

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para un elemento diferencial de volumen $\Delta x\Delta y\Delta z$, se puede escribir el siguiente balance de cantidad de movimiento.

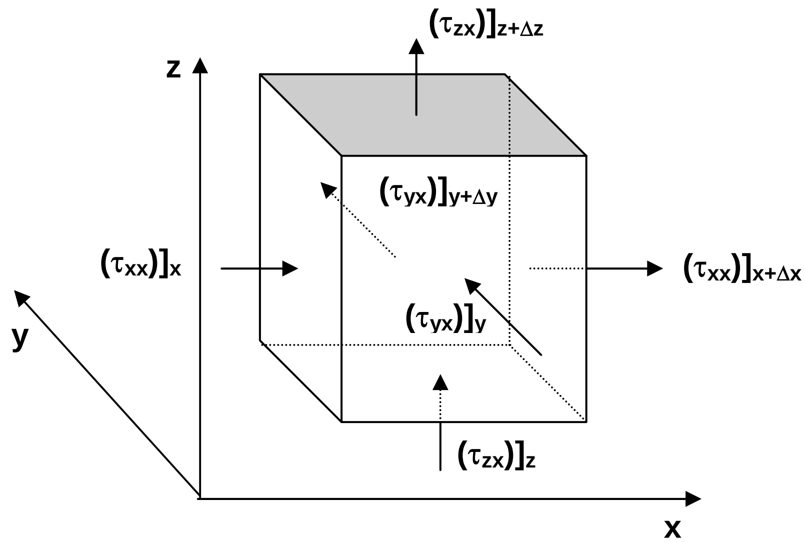

Figura 2. Región de volumen Δx, Δy, Δz fija en el espacio, en el que señala la dirección de transporte del componente x de la cantidad de movimiento a través de la superficie

Aplicando el balance de cantidad de movimiento:

$$\begin{bmatrix} \text{velocidad de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de cantidad} \\ \text{de movimiento} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{velocidad de entrada} \\ \text{de cantidad} \\ \text{de movimiento} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{velocidad de salida} \\ \text{de cantidad} \\ \text{de movimiento} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{suma de las} \\ \text{fuerzas que actuan} \\ \text{sobre el sistema} \end{bmatrix}$$

Trabajando en la dirección x, la cantidad de movimiento que entra y sale del elemento de volumen indicado en la figura 2, se produce por dos mecanismos: convección y transporte molecular.

La velocidad con que entra por convección el componente x de la cantidad de movimiento por la cara situada en x es $(\rho v_x\, v_x)]_x\Delta y\Delta z$ y la velocidad de salida por x+ Δx es $(\rho v_x\, v_x)]_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z$. Para las demás caras se pueden escribir expresiones similares. El flujo convectivo neto, de la cantidad de movimiento en el elemento de volumen es:

$$\Delta y\Delta z\left[\left(\rho v_x v_x\right)\big|_x - \left(\rho v_x v_x\right)\big|_{x+\Delta x}\right] + \Delta x\Delta z\left[\left(\rho v_y v_y\right)\big|_y - \left(\rho v_y v_y\right)\big|_{y+\Delta y}\right] + \Delta x\Delta y\left[\left(\rho v_z v_z\right)\big|_z - \left(\rho v_z v_z\right)\big|_{z+\Delta z}\right] \quad (5)$$

De igual forma, la velocidad con que el componente x de la cantidad de movimiento entra por transporte molecular por la cara situada en x es $\tau_{xx}]_x\Delta y\Delta z$, y con la que sale por x+ Δx es $\tau_{xx}]_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z$; para las demás caras se pueden escribir expresiones similares. Hay que tomar en cuenta que τ_{ij} es la densidad de flujo de cantidad de movimiento j a través de una cara perpendicular al eje i. Sumando estas seis contribuciones, se obtiene:

$$\Delta y\Delta z\left[\tau_{xx}\big|_x - \tau_{xx}\big|_{x+\Delta x}\right] + \Delta x\Delta z\left[\tau_{yx}\big|_y - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}\right] + \Delta x\Delta y\left[\tau_{zx}\big|_z - \tau_{zx}\big|_{z+\Delta z}\right] \quad (6)$$

Estas densidades de flujo de cantidad de movimiento pueden considerarse como esfuerzos. Por lo tanto, τ_{xx} es el esfuerzo normal que actúa sobre la cara $\Delta y\Delta z$, τ_{yx} es el esfuerzo tangencial que actúa sobre la cara $\Delta x\Delta z$ en la dirección x, τ_{zx} es el esfuerzo tangencial que actúa sobre la cara $\Delta x\Delta y$ en la dirección x y que resultan de las fuerzas viscosas.

En la mayor parte de los casos, las únicas fuerzas importantes serán las provenientes de la presión del fluido y la fuerza de gravedad. La resultante de estas fuerzas en la dirección x será:

$$\Delta y\Delta z\left[P\big|_x - P\big|_{x+\Delta x}\right] + \rho g_x \Delta x\Delta y\Delta z \quad (7)$$

Finalmente, la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento en el elemento diferencial de volumen es $\left(\partial\rho v_x/\partial t\right)\left(\Delta x\Delta y\Delta z\right)$. Dividiendo toda la ecuación por $\Delta x\Delta y\Delta z$, y tomando el limite cuando Δx, Δy, Δz tiende a cero, se tiene

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x \quad (8)$$

Los componentes y y z, se pueden obtener de forma análoga. Ésta ecuación se puede escribir en notación vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) = -(\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v}\underline{v}) - (\underline{\nabla} \bullet \underline{P}) - (\underline{\nabla} \bullet \underline{\underline{\tau}}) + \rho \underline{g} \quad (9)$$

donde:

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})$ es la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento

$(\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v}\underline{v})$ es la velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección

$(\underline{\nabla} \bullet \underline{P})$ es la fuerza de presión que actúa sobre el elemento

$(\underline{\nabla} \bullet \underline{\underline{\tau}})$ es la velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso

$\rho \underline{g}$ es la fuerza de gravedad que actúa sobre el elemento

En el siguiente capítulo se presentan la ecuación de cantidad de movimiento en todos los sistemas coordenados

LA ECUACION DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z):

En función de τ:

Componente x:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho g_x$$

Componente y:

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}-\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)+\rho g_y$$

Componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}-\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

Componente x:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

Componente y:

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

Componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

LA ECUACION DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS CILINDRICAS (r, θ, z):

En función de τ:

Componente r:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial r}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right)+\rho g_r$$

Componente θ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}v\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z}\right)+\rho g_\theta$$

Componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

Componente r:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial r}$$
$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r$$

Componente θ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$
$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta$$

Componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z$$

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS ESFÉRICA (r, θ, Φ)

En función de los esfuerzos (τ):

Componente r:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^{\,2}+v_\phi^{\,2}}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{rr}\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\tau_{r\theta}\mathrm{Sen}\theta\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi}-\frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\phi\phi}}{r}\right)+\rho g_r$$

Componente θ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^{\,2}\cdot\cot\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta}\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\tau_{\theta\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}-\frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi}\right)+\rho g_\theta$$

Componente ϕ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\phi}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi}+\frac{\tau_{r\phi}}{r}+\frac{2\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi}\right)+\rho g_\phi$$

En función de los gradientes de velocidades para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

Componente r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^{\,2}+v_\phi^{\,2}}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}v_\theta\cot\theta-\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_r$$

Componente θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{{v_\phi}^2\cot\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\mu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_\theta$$

Componente ϕ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}-\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}+\mu\left(\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}+\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)+\rho g_\phi$$

donde

$$\nabla a^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial a^2}{\partial \phi^2}\right)$$

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS RECTANGULARES (X, Y, Z)

$$\tau_{xx} = -\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{yy} = -\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]$$

donde

$$\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (R, θ, Z)

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = -\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu\left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]$$

donde

$$\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS ESFÉRICAS (R, θ, φ)

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right) - \frac{2}{3}\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right)\right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{\phi\theta} = \tau_{\theta\phi} = -\mu\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\mathrm{sen}\,\theta}\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]$$

donde

$$\left(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

BIBLIOGRAFÍA

Wilkes O. J., "Fluid Mechanicals for Chemical Engineers", Prentice Hall International Series in the Physical and Chemical Engineering Sciences, USA(1999).

Bird R.B., Stewart W.E. y Lightfoot E.N.,"Fenomenos de transporte", Editorial Reverté, España(1975).